Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Les théorèmes fondamentaux

21 avril 2008

1 La notion de presque partout

Avant de donner les théorèmes fondamentaux, il nous faut parler d'une notion primordiale en théorie de la mesure : celle de propriété vraie (ou fausse) *presque partout*.

1.1 Ensembles négligeables

Définition 1.1 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie mesurable N est* **négligeable**, *pour la mesure m, ou m-négligeable, si l'on a besoin de préciser la mesure m, si $m(N) = 0$.*

En fait, on peut définir cette notion pour des ensembles qui ne sont pas forcément mesurables : on dit que $N \subseteq S$ est négligeable s'il existe une partie mesurable $A \in \mathscr{T}$ telle que $N \subseteq A$ et $m(A) = 0$; mais nous n'aurons pas besoin de cette notion. Dans toute la suite, quand on parlera de partie négligeable, on sous-entendra qu'elle est mesurable.

Exemples.

1) Pour la mesure de Dirac en $a \in S$: une partie N est δ_a-négligeable si et seulement si $a \notin N$.

2) Pour la mesure de comptage c sur un ensemble S : une partie N est c-négligeable si et seulement si elle est vide.

3) On a vu que **toute partie dénombrable de $\mathbb{R}^d$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ_d**. En particulier, $\mathbb{Q}^d$ *est négligeable pour la mesure de Lebesgue.*

Il existe par contre des parties λ_d-négligeables de $\mathbb{R}^d$ qui ne sont *pas dénombrables.*

Exemples. 1) En dimension > 1, c'est facile à obtenir ; par exemple dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $N = \mathbb{R} \times \{0\}$ (une droite) est λ_2-négligeable (a une aire nulle). En effet, pour tous les entiers $j, k \geqslant 1$, on a :

$$\lambda_2\Big(]-k,k[\times\Big]-\frac{1}{j},\frac{1}{j}\Big[\Big) = (2k)\Big(\frac{2}{j}\Big)\,;$$

donc $\lambda_2(]-k,k[\times\{0\}) = 0$, car :

$$0 \leqslant \lambda_2(]-k,k[\times\{0\}) \leqslant \lambda_2\Big(]-k,k[\times\Big]-\frac{1}{j},\frac{1}{j}\Big[\Big) = (2k)\Big(\frac{2}{j}\Big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\,;$$

il en résulte que :

$$\lambda_2(\mathbb{R}\times\{0\}) = \lambda_2\Big(\bigcup_{k\geqslant 1}]-k,k[\times\{0\}\Big) = \lim_{k\to\infty}\!\uparrow \lambda_2(]-k,k[\times\{0\}) = 0.$$

2) En dimension 1, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$, c'est un peu plus difficile à obtenir, l'*ensemble de Cantor* est *négligeable pour la mesure de Lebesgue*, bien qu'il ne soit *pas dénombrable*.

Rappelons que l'ensemble triadique de Cantor K est contenu dans $K_0 = [0,1]$, et qu'il est l'intersection $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ de la suite d'ensembles K_n, pour $n \geqslant 1$, où K_n est obtenu à partir de K_{n-1} en retirant à chaque intervalle composant K_{n-1} le tiers central ouvert de cet intervalle :

$$K_1 = \Big[0,\frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3},1\Big]\,; \quad K_2 = \Big[0,\frac{1}{3^2}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3},\frac{7}{3^2}\Big] \cup \Big[\frac{8}{3^2},1\Big]\,; \quad \ldots .$$

Chaque K_n est compact et non vide ; donc K est un compact (en particulier un borélien) non vide. Comme chaque K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés disjoints de longueur $\frac{1}{3^n}$, on a $\lambda(K_n) = 2^n \times \frac{1}{3^n}$; donc $0 \leqslant \lambda(K) \leqslant \lambda(K_n) = (2/3)^n$, pour tout $n \geqslant 1$, de sorte que $\lambda(K) = 0$.

Par contre, K n'est pas dénombrable.En effet, si l'on écrit le nombre $x \in [0,1]$ en base 3 : $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^k$, avec $a_k \in \{0,1,2\}$, on voit, après un moment de réflexion, que $x \in K_n$ si $a_k = 0$ ou 2, c'est-à-dire $a_k \neq 1$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Il en résulte que K contient (et ne contient en fait que ceux-là) tous les nombres $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^k$ avec $a_k = 0$ ou 2, pour tout $k \geqslant 1$. Or tous ces nombres sont distincts, et leur ensemble est donc en bijection avec $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$, qui n'est pas dénombrable.

Il faut faire attention que la notion d'ensemble négligeable dépend de la mesure m ; en effet, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est λ-négligeable, et $\delta_{\sqrt{2}}$-négligeable, mais pas δ_0-négligeable, ni c-négligeable.

Les deux propriétés suivantes, bien que simples, sont essentielles.

Proposition 1.2

1) Tout sous-ensemble mesurable d'une partie négligeable est négligeable.

2) Toute réunion d'une famille **dénombrable** *de parties négligeables est encore négligeable.*

Preuve. Le 1) est évident, puisque la mesure positive m est croissante, et le 2) résulte de la sous σ-additivité de m :

$$0 \leqslant m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} N_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \qquad \square$$

1.2 Propriétés vraies presque partout

Définition 1.3 *Soit $\mathcal{P}$ une propriété, pouvant être ou non vérifiée par les éléments $x \in S$. On dit que cette* propriété *est* mesurable *si $\{x \in S\,;\ \mathcal{P}(x)\ vraie\}$ est mesurable. On dit qu'elle* **vraie m-presque partout**, *en abrégé* vraie m-p.p., *si $\{x \in S\,;\ \mathcal{P}(x)\ fausse\}$ est m-négligeable :*

$$\boxed{m\big(\{x \in S\,;\ \mathcal{P}(x)\ fausse\}\big) = 0}.$$

Précisons quelques propriétés de ce type.

a. Fonctions finies presque partout

Définition 1.4 *Si $f\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable, on dit que f est* **finie m-presque partout** *si $\{|f| = +\infty\}$ est m-négligeable :*

$$\boxed{m\big(\{|f| = +\infty\}\big) = 0}.$$

On écrit aussi : $|f| < +\infty$ *m-p.p.*.

Théorème 1.5 *Si $f\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ est m-intégrable, alors f est finie m-presque partout.*

Ainsi une fonction intégrable, si elle peut prendre des valeurs infinies, ne peut pas les prendre trop souvent.

Pour prouver ce théorème, on va utiliser l'inégalité **très utile** suivante.

Lemme 1.6 (Inégalité de Markov-Tchebychev)
Pour toute fonction mesurable $g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, on a, pour tout $a > 0$:

$$\boxed{m\big(\{|g| \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a} \int_S |g|\, dm}.$$

Preuve du lemme. Il suffit de réaliser la chose évidente qui est que, lorsque $x \in \{|g| \geqslant a\}$, on a $|g(x)| \geqslant a$; donc :

$$\int_S |g|\, dm \geqslant \int_{\{|g|\geqslant a\}} |g|\, dm \geqslant \int_{\{|g|\geqslant a\}} a\, dm = a\, m\big(\{|g| \geqslant a\}\big). \qquad \square$$

Preuve du théorème. Pour tout $a > 0$, on a :

$$0 \leqslant m\big(\{|f| = +\infty\}\big) \leqslant m\big(\{|f| \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a} \int_S |f|\, dm.$$

Comme f est intégrable, on a $\int_S |f|\, dm < +\infty$, et donc :

$$\frac{1}{a} \int_S |f|\, dm \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte que $m\big(\{|f| = +\infty\}\big) = 0$. $\square$

Remarque. On peut ainsi compléter ce qui a été dit pour l'intégrabilité par rapport à une mesure à densité au chapitre précédent. En effet, soit $w\colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive (une densité ; on dit aussi un *poids*) ; alors si $f\colon S \to \mathbb{C}$ est $(w.m)$-intégrable, l'égalité :

$$\int_S |f|\, w\, dm = \int_S |f|\, d(w.m) < +\infty$$

montre que $|f|w$ est finie m-presque partout. On peut donc modifier f, en posant $f(x) = 0$ si $|f(x)|\, w(x) = +\infty$; la nouvelle fonction f est égale m-presque partout à l'ancienne, et permet de pouvoir redéfinir fw pour qu'elle soit à valeurs dans $\mathbb{C}$.

b. Fonctions égales presque partout. Fonctions négligeables

Définition 1.7 *Soit $f, g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions mesurables ; on dit que f et g sont* **égales m-presque partout***, et l'on écrit : $f = g$ m-p.p., si $\{f \neq g\}$ est négligeable :* $\boxed{m\big(\{f \neq g\}\big) = 0}$.

On dit que la fonction mesurable f est **m-négligeable***, ou* négligeable pour la mesure m, *si elle est nulle m-presque partout :* $m\big(\{f \neq 0\}\big) = 0$.

Notons que cela a bien un sens car $\{f \neq g\}$ est mesurable. C'est clair si $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, car alors $f - g$ est définie sur S et est mesurable ; donc $\{f \neq g\} = \{f - g \neq 0\}$ est mesurable. Dans le cas où $f, g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ peuvent prendre des valeurs infinies, notons $f_1 = f\,\mathbb{1}_{\{|f|<+\infty\}}$ (c'est-à-dire que $f_1(x) = f(x)$ si $|f(x)| < +\infty$, et $f_1(x) = 0$ si $|f(x)| = +\infty$), et $g_1 = f\,\mathbb{1}_{\{|g|<+\infty\}}$. Alors f_1 et g_1 sont mesurables et prennent des valeurs finies. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\{f \neq g\}$ est la réunion des ensembles mesurables suivants : $\{f_1 \neq g_1\}$, $\{f = -\infty\} \cap \{g \neq -\infty\}$, $\{f = +\infty\} \cap \{g \neq +\infty\}$, $\{f \neq -\infty\} \cap \{g = -\infty\}$, $\{f \neq +\infty\} \cap \{g = +\infty\}$.

Pour un ensemble mesurable A, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est m-négligeable si et seulement si A est m-négligeable, c'est-à-dire $m(A) = 0$. Par exemple la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.8 *Soit $f\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction m-intégrable. On a :*

$$\boxed{\int_S |f|\,dm = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \quad m-p.p.}\,.$$

Preuve. 1) Supposons d'abord $f = 0$ m-presque partout. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas tout-à-fait immédiat de conclure.

a) Supposons d'abord f bornée : $(\exists M < +\infty)$: $\quad |f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in S$.

Dans ce cas, c'est clair, car :

$$|f| = |f|\,\mathbb{1}_{\{f\neq 0\}} \leqslant M\,\mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}\,;$$

donc :

$$0 \leqslant \int_S |f|\,dm \leqslant M\,m\big(\{f \neq 0\}\big) = M \times 0 = 0.$$

b) Dans le cas général, soit $f_n = \inf(|f|, n)$. Comme $f = 0$ m-$p.p.$, on a aussi $f_n = 0$ m-$p.p.$, et, puisque f_n est bornée (par n), on a $\int_S f_n\,dm = 0$. Alors, le Théorème de convergence monotone donne :

$$\int_S |f|\,dm = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_S f_n\,dm = 0.$$

2) Réciproquement, si $\int_S |f|\,dm = 0$, on a, pour tout $a > 0$, par l'inégalité de Markov-Tchebychev :

$$0 \leqslant m\big(\{|f| \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a}\int_S |f|\,dm = 0\,;$$

donc $m\big(\{|f| \geqslant a\}\big) = 0$, et :

$$m\big(\{f \neq 0\}\big) = m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}\{|f| \geqslant 1/n\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow m\big(\{|f| \geqslant 1/n\}\big) = 0,$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Il résulte de ce théorème que, *pour ce qui concerne les intégrales, les ensembles négligeables n'ont pas d'influence, et des fonctions égales presque partout se comportent de la même façon*, comme nous allons le préciser dans les corollaires suivants.

Corollaire 1.9 *Si N est une partie négligeable : $\boxed{m(N) = 0}$, alors, pour toute fonction mesurable $f\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, on a :*

$$\boxed{\int_N |f|\, dm = 0}.$$

Par conséquent, f est m-intégrable sur S si et seulement si elle l'est sur $S \setminus N$, et l'on a :

$$\int_S f\, dm = \int_{S\setminus N} f\, dm.$$

Preuve. 1) On a :

$$\int_N |f|\, dm = \int_S |f|\mathbb{1}_N\, dm = 0,$$

car $|f|\mathbb{1}_N = 0$ m-presque partout ; en effet, $\{|f|\mathbb{1}_N \neq 0\} \subseteq N$, grâce à la convention $(\pm\infty) \times 0 = 0$. Si f est m-intégrable, il en résulte que $\int_N f\, dm = 0$, puisque :

$$\left| \int_N f\, dm \right| \leqslant \int_N |f|\, dm = 0.$$

2) Alors, en particulier $f\mathbb{1}_N$ est m-intégrable. Comme $f = \mathbb{1}_{S\setminus N} + f\mathbb{1}_N$, il en résulte que f est m-intégrable sur S si et seulement si $f\mathbb{1}_{S\setminus N}$ l'est , c'est-à-dire si et seulement si f est m-intégrable sur $S \setminus N$. De plus, dans ce cas :

$$\int_S f\, dm = \int_S f\mathbb{1}_{S\setminus N}\, dm + \int_S f\mathbb{1}_N\, dm = \int_{S\setminus N} f\, dm + \int_N f\, dm = \int_{S\setminus N} f\, dm. \quad \square$$

Corollaire 1.10 *Soit $f, g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions m-intégrables. Si $f = g$ m-presque partout, alors :*

$$\int_S f\, dm = \int_S g\, dm.$$

Preuve. En effet, si $N = \{f \neq g\}$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in N^c$, et l'on a :

$$\int_S f\, dm = \int_{S\setminus N} f\, dm = \int_{S\setminus N} g\, dm = \int_S g\, dm. \qquad \square$$

Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Si f est définie sur $[a,b]$, alors f est λ-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur $]a,b]$, ou sur $[a,b[$, ou sur $]a,b[$, et l'on a alors :

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b[} f\,d\lambda = \int_{]a,b]} f\,d\lambda = \int_{]a,b[} f\,d\lambda\,;$$

on notera donc cette valeur par :

$$\boxed{\int_a^b f\,d\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,d\lambda(x)}.$$

De même, f est λ-intégrable sur $[a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,a]$) si et seulement si elle l'est sur $]a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,a[$), et l'on a alors :

$$\int_{[a,+\infty[} f\,d\lambda = \int_{]a,+\infty[} f\,d\lambda\,, \qquad \text{resp.} \quad \int_{]-\infty,a]} f\,d\lambda = \int_{]-\infty,a[} f\,d\lambda\,,$$

et l'on notera ces valeurs, respectivement :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f\,d\lambda = \int_a^{+\infty} f(x)\,d\lambda(x)}, \qquad \text{et} \quad \boxed{\int_{-\infty}^a f\,d\lambda = \int_{-\infty}^a f(x)\,d\lambda(x)}.$$

c. Convergence presque partout

Proposition 1.11 *Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions mesurables $f_n\colon S\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, son* ensemble de convergence *:*

$$C = \big\{x\in S\,;\ \big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge }\big\}$$

est mesurable.

Notons que, dans le cas réel, on demande la convergence, c'est-à-dire l'existence d'une limite finie ; ce n'est pas une obligation ; une preuve tout-à-fait similaire montrerait que $C_\infty = \{x\in S\,;\ \big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty\}$ est mesurable, et donc $C\cup C_\infty$ est mesurable.

Preuve. La suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, ce qui s'écrit :

$$(\forall k\geqslant 1)\quad (\exists n\geqslant 1)\qquad \Big[|f_{n+p}(x)-f_{n+q}(x)|\leqslant \frac{1}{k}\,,\quad \forall p,q\geqslant 1\,;$$

donc :

$$C = \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{p,q\geqslant 1}\Big\{x\in S\,;\ |f_{n+p}(x)-f_{n+q}(x)|\leqslant \frac{1}{k}\Big\}.$$

Mais,, pour tous $k, n, p, q \geqslant 1$, l'ensemble $\left\{x \in S\,;\ |f_{n+p}(x) - f_{n+q}(x)| \leqslant \frac{1}{k}\right\} = C_{k,n,p,q}$ est mesurable car la fonction $f_{n+p} - f_{n+q}$ est mesurable. Donc C est mesurable. □

Définition 1.12 *On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions mesurables* **converge presque partout** *si l'ensemble $S \setminus C$ est négligeable : $m(S \setminus C) = 0$.*

On peut définir alors :

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{si} \quad x \in C, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin C. \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction mesurable. On notera que la valeur 0 donnée à f sur $S \setminus C$ n'aura en général pas d'influence : toute autre fonction, à condition qu'elle soit mesurable, définie sur $S \setminus C$, aurait fait l'affaire.

Exemples.

a. Prenons $S = [0, 1]$, avec la mesure de Lebesgue, et $f_n(x) = (-x)^n$. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout $x \in C = [0, 1[$, mais pas pour $x = 1$. Comme $\lambda(\{1\}) = 0$, la suite converge presque partout sur $[0, 1]$, pour la mesure de Lebesgue.

b. Prenons $S = \mathbb{R}$, toujours avec la mesure de Lebesgue, et $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n|\sin x|}$. Alors :

- si $\sin x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
- si $\sin x = 0$, c'est-à-dire si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on a $f_n(x) = 1$;

la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais la limite 1 est sans grand intérêt : comme $\lambda(\pi\mathbb{Z}) = 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge λ-presque partout vers 0.

c. Modifions un peu l'exemple précédent, en prenant toujours $S = \mathbb{R}$, mais $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n|\sin x| + (-1)^n x\sqrt{n}}$. Alors :

- si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
- si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 1$;
- si $x \in \pi\mathbb{Z}$, $x \neq 0$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite ;

mais là aussi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque partout vers 0.

d. Fonctions définies presque partout

Définition 1.13 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. On dit qu'une* **fonction f est définie presque partout** *sur S s'il existe une partie négligeable $N \subseteq S$ telle que f soit définie sur $S \setminus N$.*

Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie presque partout, pour la mesure de Lebesgue, sur $\mathbb{R}$. On verra qu'elle est intégrable, pas sur $\mathbb{R}$, mais sur, par exemple, $[-1, 1]$.

On conviendra de toujours prolonger une fonction mesurable définie presque partout à S tout entier en posant $f(x) = 0$ si $x \in N$. On notera ce prolongement encore par f.

Lorsque cette fonction est mesurable, pour la tribu-trace $\mathscr{T}_{N^c}$ sur N^c, ce prolongement sera mesurable sur S, d'après le lemme de recollement. En fait, tout prolongement mesurable de f à S est égal presque partout à ce prolongement par 0 ; vis-à-vis de l'intégrale, il n'y a donc pas de différence entre prolonger par 0 sur N, ou par prolonger par une autre fonction (du moment qu'elle soit mesurable).

1.3 Complément

Rappelons que l'on dit qu'une partie $N \subseteq S$ est m-négligeable s'il existe une partie mesurable $A \in \mathscr{T}$ telle que $N \subseteq A$ et $m(A) = 0$. De telles parties ne sont pas forcément mesurables ; on dit qu'un espace mesuré $(S, \mathscr{T}, m)$ est *complet* si toute partie m-négligeable est mesurable. Il est toujours possible de plonger un espace mesuré $(S, \mathscr{T}, m)$ dans un espace mesuré complet. En effet, si l'on pose

$$\widetilde{\mathscr{T}} = \{A \cup N\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et} N \text{ est } m\text{-négligeable}\},$$

on vérifie facilement que $\widetilde{\mathscr{T}}$ est une tribu de parties de S contenant $\mathscr{T}$. De plus, si $A \cup N = A' \cup N'$, avec $A, A' \in \mathscr{T}$ et N, N' négligeables, alors $m(A) = m(A')$, et l'on peut donc définir $\widetilde{m}(A \cup N) = m(A)$; il est immédiat que $\widetilde{m}$ est une mesure positive sur $(S, \widetilde{\mathscr{T}})$, qui prolonge m. Il, reste à réaliser que toute partie $N \subseteq S$ telle que $\widetilde{m}(N) = 0$ est dans $\widetilde{\mathscr{T}}$, pour en déduire que l'espace mesuré $(S, \widetilde{\mathscr{T}}, \widetilde{m})$ est complet.

On dit que $(S, \widetilde{\mathscr{T}}, \widetilde{m})$ est la tribu complétée de $(S, \mathscr{T}, m)$.

La tribu complétée de la tribu borélienne $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$ s'appelle la *tribu de Lebesgue* de $\mathbb{R}$, et notée $\mathcal{L}eb\,(\mathbb{R})$. Ses éléments sont dits *mesurables au sens de Lebesgue.* Il y a des ensembles mesurables au sens de Lebesgue qui ne sont pas boréliens : on peut trouver dans le livre de Cohn, Measure theory, la construction d'un *ensemble analytique* (c'est-à-dire la projection sur $\mathbb{R}$ d'un ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$) qui n'est pas borélien ; or tout ensemble analytique est mesurable au sens de Lebesgue.

En fait, tribu de Lebesgue est beaucoup plus grosse que la tribu borélienne ; on peut montrer en effet que le cardinal de $\mathcal{B}or\,(\mathbb{R})$ est le même que celui de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'on peut indexer les boréliens par les nombres réels, alors que le cardinal de $\mathcal{L}eb\,(\mathbb{R})$ est le même que celui de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, puisque $\mathcal{L}eb\,(\mathbb{R})$ contient toutes les parties de l'ensemble de Cantor K, qui a le même cardinal que $\mathbb{R}$.

Toutefois, en utilisant l'*axiome du choix*, on peut montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas mesurables au sens de Lebesgue (on choisit un élément de $[0, 1]$ dans chaque classe d'équivalence de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$). Mais ce résultat est effectivement dépendant de l'axiome du choix : Solovay a démontré en 1968 qu'en renonçant à l'axiome du choix, on pouvait mettre comme axiome que *toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Ce qu'il faut retenir de la discussion précédente, c'est que toute partie de $\mathbb{R}$ que l'on peut construire "explicitement", c'est-à-dire sans utiliser l'axiome du choix, est mesurable au sens de Lebesgue : il n'est pas possible de rencontrer "dans la nature" de partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas mesurable au sens de Lebesgue !

2 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

2.1 Cas d'un intervalle compact

Il s'avère que dans ce cas, toute fonction Riemann-intégrable (à condition de la supposer mesurable) est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.1 *Toute fonction borélienne* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *qui est Riemann-intégrable est intégrable sur* $[a,b]$ *par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, les deux intégrales sont égales :*

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

On notera que le théorème s'applique en particulier si f est **continue**, ou plus généralement *continue par morceaux.*

Il en résulte que, pour ces fonctions, et pour la mesure de Lebesgue, on peut utiliser toutes les techniques vues pour le calcul des intégrales de Riemann : *utilisation de primitives*, lorsque f est continue, *via* le **Théorème fondamental du Calcul Intégral**, changement de variable, intégration par parties, *etc.*

Preuve. Tout d'abord, puisque f est Riemann-intégrable, elle est, par hypothèse, bornée. Comme elle est supposée mesurable, et que la mesure de Lebesgue de l'intervalle compact $[a,b]$ $\lambda([a,b]) = b-a$ est finie, f est λ-intégrable.

Pour l'égalité des intégrales, on peut supposer f *positive* ; en effet, si f est Riemann-intégrable, alors $|f|$ aussi, et il en est de même de $f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$. Si on a l'égalité des intégrales, de Riemann et par rapport à λ, pour les fonctions positivesf^+ et f^-, on l'aura pour $f = f^+ - f^-$.

Supposons donc f Riemann-intégrable positive. Il existe alors une suite *croissante* de fonctions positives *en escalier* g_n, $n \geqslant 1$, et une suite *décroissante* de fonctions, positives, *en escalier* h_n, $n \geqslant 1$ telles que $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et :

$$R-\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \left(R-\int_a^b g_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\!\downarrow \left(R-\int_a^b h_n(x)\,dx\right), \tag{2.1}$$

où l'on a noté provisoirement avec un $R-$ les intégrales de Riemann, pour plus de clarté.

D'autre part, si l'on note :

$$g = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow g_n \qquad \text{et} \quad h = \lim_{n\to\infty}\!\downarrow h_n,$$

le Théorème de convergence monotone (appliqué aux suites positives croissantes $(g_n)_{n\geqslant 1}$ et $(h_1 - h_n)_{n\geqslant 1}$) donne :

$$\lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{[a,b]} g_n\,d\lambda = \int_{[a,b]} g\,d\lambda \qquad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\!\downarrow \int_{[a,b]} h_n\,d\lambda = \int_{[a,b]} h\,d\lambda. \tag{2.2}$$

Le *point essentiel* est maintenant que les fonctions en escalier $\varphi = \sum_{j=1}^{J} c_j \mathbb{1}_{I_j}$ sont en particulier des fonctions étagées, et que leur intégrale de Riemann est égale à leur intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$R - \int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^{J} c_j(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{J} c_j \ell(I_j) = \int_{[a,b]} \varphi\, d\lambda, \tag{2.3}$$

si I_j est d'extrémités a_j et b_j, car *la mesure de Lebesgue de l'intervalle* I_j est $\lambda(I_j) = (b_j - a_j)$.

On obtient donc, en combinant (2.1), (2.2), et (2.3) :

$$\int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda = R - \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Cela prouve, puisque g et h sont mesurables positives, qu'elles sont λ-intégrables sur $[a, b]$, et que :

$$\int_{[a,b]} (h - g)\, d\lambda = 0.$$

Il résulte alors du Théorème 1.8, puisque $h-g \geqslant 0$, que $g = h$ λ-presque partout.

Mais $g \leqslant f \leqslant h$; donc $g = f = h$ λ-presque partout, et il résulte du Corollaire 1.10 que :

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda.$$

Alors (2.4) entraîne :

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = R - \int_a^b f(x)\, dx,$$

comme on voulait le montrer. □

Remarque. Riemann a montré que $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, supposée mesurable, est Riemann-intégrable si et seulement si elle est *continue presque partout*, c'est-à-dire que :

$$\lambda\big(\{x \in [a, b]\, ;\ f \text{ ne soit pas continue en } x\}\big) = 0.$$

Il a en fait montré que f Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des points où elle n'est pas continue peut être recouvert, pour tout $\varepsilon > 0$, par la réunion d'une suite d'intervalles dont la somme des longueur est $\leqslant \varepsilon$. Cela entraîne évidemment que f est continue presque partout, au sens donné ci-dessus, mais on peut montrer que c'est équivalent.

2.2 Cas des intégrales généralisées

Les choses se passent ici un peu moins bien. On peut s'en douter car, par définition, une fonction mesurable est λ-intégrable si et seulement si sa valeur absolue $|f|$ l'est. Mais c'est en fait la seule contrainte.

Théorème 2.2 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$, d'extrémités a at b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et localement R-intégrable. Alors f est intégrable sur I pour la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée de f est* **absolument convergente**.

Rappelons que toute fonction **continue**, ou plus généralement **continue par morceaux** est mesurable et localement R-intégrable.

Nous verrons dans la Partie 3, Théorème 3.2, en utilisant le Théorème de convergence dominée, que, dans ces conditions, il y a égalité entre l'intégrale de f sur I par rapport à la mesure de Lebesgue et l'intégrale de Riemann généralisée de f de a à b.

Par exemple, la fonction, définie presque partout $x \in [-1,1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, prolongée par 0 en 0, est λ-intégrable sur $[-1,1]$, puisque les intégrales généralisées $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ sont absolument convergentes.

Remarque. Ainsi, les intégrales de Riemann généralisées *semi-convergentes* n'entrent pas dans le cadre de l'intégration de Lebesgue ; elles conservent néanmoins leur statut de *limites d'intégrales*, et les résultats vus pour elles restent bien évidemment valables.

Insistons sur le fait que les intégrales Riemann généralisées absolument convergentes n'apparaissent plus maintenant comme des limites d'intégrales, mais bel et bien comme de vraies intégrales, par rapport à la mesure de Lebesgue.

Preuve du théorème. En coupant l'intervalle I, on se ramène au cas où $I = [a,b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *croissante*, telle que $a < b_n < b$ pour tout $n \geqslant 1$, et ayant pour limite b. Posons $f_n = f\,\mathbb{1}_{[a,b_n]}$. On a $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Alors, comme la suite $(|f_n|)_{n\geqslant 1}$ est *croissante*, le Théorème de convergence monotone donne :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b[} |f|\,d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{[a,b[} |f_n|\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{[a,b_n]} |f|\,d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \left[R - \int_a^{b_n} |f(x)|\,dx \right] \quad \text{car } |f| \text{ est } R\text{-intégrable sur } [a,b_n] \\
&= R - \int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction f est λ-intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $R - \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$. □

Remarque. Lorsque la fonction $F\colon I \to \mathbb{R}_+$ est **positive**, dans le théorème, on peut *toujours* identifier l'intégrale de Riemann généralisée $R - \int_a^b f(x)\,dx$ avec l'intégrale $\int_I f\,d\lambda$, puisque si f n'est pas λ-intégrable sur I, ces deux intégrales valent $+\infty$.

A partir de maintenant, on ne fera plus de distinction d'écriture entre l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue et les intégrales de Riemann, lorsque la fonction est Riemann-intégrable sur un intervalle compact, ou les intégrales de Riemann généralisées pour les fonctions mesurables localement Riemann-intégrables, lorsqu'elles sont absolument convergente, ou lorsque la fonction est positive.

3 Le Théorème de convergence dominée

3.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Rappelons que l'un des théorèmes fondamentaux est le *Théorème de convergence monotone*. Il est très utile, mais ses conditions d'utilisation nécessitent d'avoir une suite *croissante* de fonctions mesurables *positives*. S'il est possible de modifier le théorème pour se passer de la positivité (c'est le Théorème de Beppo Levi, dont on n'aura pas besoin), la *croissance* de la suite est essentielle. On sait bien (des exemples très simples le montrent, que l'on peut produire avec l'intégrale de Riemann, maintenant à notre disposition) qu'il n'est pas possible, sans hypothèse supplémentaire, de pouvoir intervertir intégrales et limites. Le Théorème de convergence dominée va permettre de le faire avec des conditions **très simples à vérifier** .

Théorème 3.1 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)
Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ *un espace mesuré, et soit* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite d'applications mesurables* $f_n \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On suppose que :*

1) la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge presque partout vers une fonction mesurable* $f \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *;*

2) il existe une fonction **intégrable** $g \colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ positive *telle que l'on ait la* **condition de domination** *:*

$$\boxed{|f_n| \leqslant g \text{ presque partout}, \quad \forall n \geqslant 1.}$$

Alors, les fonctions f_n *et* f *sont intégrables et :*

$$\boxed{\int_S f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n\,dm} \; ;$$

et même :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_S |f_n - f|\,dm = 0}\, .$$

Bien sûr, ce théorème s'applique si les deux conditions sont vérifiées *partout*, et pas seulement presque partout.

Bien que cela soit clair dans l'énoncé, insistons bien sur le fait que la condition de domination signifie qu'il existe une fonction intégrable g qui majore *toutes* les $|f_n|$ (presque partout) : cette fonction g ne doit donc pas dépendre de n !

L'intérêt de ce théorème, insistons, est qu'il est *très facile à utiliser*, et que les conditions d'application sont peu exigentes : on a juste besoin de la condition de domination.

On notera que cette condition de domination est vérifiée si et seulement si la fonction $\sup_{n\geqslant 1}|f_n|$ est intégrable ; mais il n'y a *pas besoin* de calculer cette borne supérieure, ce qui peut être difficile, voire hors de portée : il y a juste besoin de la **majorer**, en s'assurant quand même que ce soit par une **fonction intégrable** (on peut donc majorer, mais il ne faut pas le faire trop brutalement).

Exemple. Prenons $S = [0, +\infty[$, avec la mesure de Lebesgue, bien sûr. Soit :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sin(nx)+\arctan(x+n)}{nx}} + (\cos x)^n}{1+x^2} \,\cdot$$

On a $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \notin \pi\mathbb{N}$, donc presque partout sur $[0, +\infty[$ (et il n'y a pas de limite si x est de la forme $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$). Il n'est évidemment pas question de calculer $\sup|f_n|$ (et encore moins $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$). Néanmoins, il est immédiat que :

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}+1}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{1+x^2}\,, \qquad \forall x \geqslant 0.$$

Comme il est bien connu, et facile à voir, que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente, et absolument puisque la fonction est positive, la fonction g définie par $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$ est λ-intégrable sur $[0, +\infty[$; le Théorème de convergence dominée s'applique donc, et l'on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[}\frac{1}{1+x^2}\,d\lambda(x)\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\,\cdot\end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, on a utilisé le Théorème 2.2, avec la précision suivante.

Théorème 3.2 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ telle que son intégrale de Riemann génélisée $R - \int_a^b f(x)\,dx$ soit* **absolument convergente***. Alors l'intégrale de f sur I par rapport à la mesure de Lebesgue est égale à l'intégrale de Riemann généralisée de f de a à b :*

$$\int_I f\,d\lambda = R - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Preuve. Reprenons les notations de la preuve du Théorème 2.2, avec $f_n = f\mathbb{1}_{[a,b_n]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Comme $|f_n| \leqslant |f|$, et que $|f|$ est λ-intégrable, le Théorème de convergence dominée donne :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b[} f\,d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b[} f_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b_n]} f\,d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} R - \int_a^{b_n} f(x)\,dx = R - \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square\end{aligned}$$

Preuve du Théorème de convergence dominée.

1. Tout d'abord, *on peut supposer* que l'on a :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \\ |f_n(x)| \leqslant g(x) \quad \text{et} \quad g(x) < +\infty \end{cases} \qquad \text{pour } \textbf{tout } x \in S.$$

En effet, la condition de domination étant vérifiée, il existe, pour chaque $n \geqslant 1$ un ensemble négligeable N_n tel que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in S \setminus N_n$. Donc si $N = \bigcup_{n\geqslant 1} N_n$, l'ensemble N est négligeable, et $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in S \setminus N$, et pour tout $n \geqslant 1$.

D'autre part, si $C = \{x \in S\,;\ \big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1} \text{ converge }\}$, la convergence presque partout de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ s'exprime en disant que $S \setminus C$ est négligeable. Enfin, comme g est intégrable, elle est finie presque partout, c'est-à-dire que si l'on pose $F = \{g < +\infty\}$, on a $m(S \setminus F) = 0$. Alors, si $A = C \cap F \cap (S \setminus N)$, son complémentaire $A^c = (S \setminus C) \cup (S \setminus F) \cup N$ est négligeable, comme réunion de trois ensembles négligeables.

En travaillant sur A au lieu de travailler sur S (ou bien, en travaillant sur S, mais en remplaçant f_n, f et g par $f_n\mathbb{1}_A, f\mathbb{1}_A$ et $g\mathbb{1}_A$), ce qui ne changera pas les conclusions du théorème, on a bien les conditions (3.1).

De plus, *on peut supposer les f_n à valeurs réelles*, en séparant les parties réelles et imaginaires lorsqu'elles sont à valeurs complexes.

2. Passons maintenant à la *preuve proprement dite* du théorème.

Tout d'abord, puisque $|f_n| \leqslant g$, avec g intégrable, les f_n sont aussi intégrables, et, comme, en passant à la limite on a aussi $|f| \leqslant g$, f est aussi intégrable.

Voyons maintenant la convergence des intégrales.

On a :

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g\,;$$

les fonctions $h_n = 2g - |f_n - f|$ sont donc mesurables positives, et on peut donc leur appliquer le **Lemme de Fatou** :

$$\begin{aligned}\int_S (2g)\,dm &= \int_S \Big[\lim_{n\to\infty} \big(2g - |f_n - f|\big)\Big]\,dm \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \Big[\int_S \big(2g - |f_n - f|\big)\,dm\Big] \\ &= \int_S (2g)\,dm - \limsup_{n\to\infty} \int_S |f_n - f|\,dm,\end{aligned}$$

ce qu'il est possible d'écrire car toutes les intégrales sont *finies*. On peut de plus simplifier par $\int_S (2g)\, dm < +\infty$; on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_S |f_n - f|\, dm \leqslant 0.$$

Comme les intégrales $\int_S |f_n - f|\, dm$ sont positives, cela signifie que la limite existe et est nulle :

$$\lim_{n\to\infty} \int_S |f_n - f|\, dm = 0.$$

En particulier, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f\, dm,$$

en utilisant l'inégalité :

$$\Big| \int_S f_n\, dm - \int_S f\, dm \Big| = \Big| \int_S (f_n - f)\, dm \Big| \leqslant \int_S |f_n - f|\, dm,$$

et cela termine la preuve du Théorème de convergence dominée. □

Remarque. Le théorème montre la conclusion forte : $\lim_{n\to\infty} \int_S |f_n - f|\, dm = 0$; mais elle découle de la conclusion, *a priori* plus faible $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f\, dm$, si on applique cette dernière à la suite $(|f_n - f|)_{n\geqslant 1}$, au lieu de $(f_n)_{n\geqslant 1}$, qui vérifie la condition de domination $|f_n - f| \leqslant 2g$ *p.p.* pour tout $n \geqslant 1$.

Voyons quelques conséquences du Théorème de convergence dominée.

Corollaire 3.3 *Supposons que* $\boxed{m(S) < +\infty}$.

Soit $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *des fonctions mesurables,* $n \geqslant 1$. *Si :*

1) la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplement sur* S *:* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in S$,

2) la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *est* uniformément bornée *:*

$$(\exists M < +\infty) \qquad |f_n(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in S,\ \forall n \geqslant 1,$$

les fonctions f_n *et* f *sont* m*-intégrables et l'on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f\, dm.$$

Preuve. C'est une conséquence directe du Théorème de convergence dominée : puisque $m(S) < +\infty$, la fonction constante égale à M est m-intégrable. □

Comme exemple d'application, supposons que les $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ soient continues, uniformément bornées, et convergeant simplement vers 0 ; alors on a : $\int_0^1 f_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce résultat, ne faisant intervenir que des fonctions continues, peut être vu comme concernant l'intégrale de Riemann. Il peut être démontré avec les méthodes issues de cette notion d'intégrale ; mais si on essaie de le faire, on se rend compte que c'est plutôt difficile.

Corollaire 3.4 *Supposons toujours que* $\boxed{m(S) < +\infty}$.

Soit $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *des applications mesurables, chacune étant bornée. Alors, si la suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge* uniformément *vers* f *sur* S*, les fonctions* f_n *et* f *sont* m*-intégrables et l'on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f \, dm.$$

Preuve. Notons, pour toute $g\colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\|g\|_\infty = \sup_{x\in S} |g(x)|$. Comme la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément, elle est uniformément de Cauchy ; il existe donc $N \geqslant 1$ tel que $\|f_n - f_k\|_\infty \leqslant 1$ pour $n, k \geqslant N$. En particulier : $\|f_n - f_N\|_\infty \leqslant 1$, et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_N\|_\infty + 1$, pour $n \geqslant N$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$|f_n(x)| \leqslant M = \max\{\|f_1\|_\infty, \ldots, \|f_{N-1}\|_\infty, \|f_N\|_\infty + 1\},$$

pour tout $x \in S$, et il suffit donc d'appliquer le Corollaire 3.3. □

Lorsque l'on applique le Théorème de convergence dominée à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$, on obtient :

Corollaire 3.5 *Soit* $(a_{k,n})_{k,n\geqslant 1}$ *une suite double de nombres complexes. On suppose que :*

1) $\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k \in \mathbb{C}$ *existe pour tout* $k \geqslant 1$*,*

2) il existe des $b_k \geqslant 0$ *tels que :*

$$\begin{cases} a) & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \\ b) & |a_{k,n}| \leqslant b_k, \quad \forall k, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

les séries écrites étant absolument convergentes.

Voyons maintenant, non plus un corollaire du Théorème de convergence dominée, mais plutôt un résultat l'utilisant de façon essentielle, sous sa forme forte. On y voit aussi apparaître, de façon naturelle, même si elles n'interviennent pas au départ, les notions de fonction pouvant prendre la valeur $+\infty$, de *fonction finie presque partout*, de *fonction définie presque partout*, et de *convergence presque partout*. Ainsi, on voit que ces notions n'ont pas été introduites arbitrairement. C'est en fait plus sa preuve, pour l'instant, que le résultat lui-même, même s'il est intéressant, qui le rend remarquable.

Ce théorème montre en fait que l'espace de Lebesgue $L^1(m)$ est un espace normé *complet*, comme on le verra au Chapitre 6, mais on peut aussi simplement le voir comme un résultat d'interversion d'intégrales et de limites. On notera que l'hypothèse ne porte plus ici sur les fonctions, mais seulement sur leurs intégrales.

Théorème 3.6 *Soit* $(S, \mathscr{T}, m)$ *un espace mesuré, et soit* $f_n \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *des fonctions* m*-intégrables telles que :*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_S |f_n| \, dm \right) < +\infty}.$$

Alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

existe pour **presque tout** $x \in S$*, et la fonction* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *ainsi définie presque partout, et prolongée par* 0 *ailleurs, est intégrable, et l'on a :*

$$\boxed{\int_S \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_S f_n \, dm \right)}.$$

Preuve. Posons :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \qquad \forall x \in S.$$

Alors $\varphi \colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable positive, et, par le *Théorème de convergence monotone*, pour les séries à termes positifs, donne :

$$\int_S \varphi \, dm = \int_S \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \Big) \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_S |f_n| \, dm \right) < +\infty,$$

par hypothèse. Cela signifie que la fonction φ est *m-intégrable*. Elle est donc *finie presque partout* : si $F = \{\varphi < +\infty\}$, on a $m(F^c) = 0$. Mais dire que $\varphi(x) < +\infty$ signifie que la *série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *est absolument convergente*, et en particulier convergente. Donc :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

existe pour tout $x \in F$, et donc presque partout. La fonction f, prolongée par 0 sur F^c, est mesurable, et comme $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, elle est intégrable.

De plus, si l'on pose :

$$s_N = f_1 + \cdots + f_N,$$

alors :

$$s_N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} f \qquad m\text{-presque partout},$$

et :

$$|s_N| \leqslant \varphi\,, \quad \forall N \geqslant 1, \quad \text{partout}\,;$$

le *Théorème de convergence dominée* entraîne donc :

$$\begin{aligned}\int_S f\,dm &= \int_S \Big(\lim_{N\to\infty} s_N\Big)\,dm \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_S s_N\,dm = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^N \int_S f_n\,dm\right] = \sum_{n=1}^\infty \int_S f_n\,dm,\end{aligned}$$

comme annoncé. □

3.2 Quelques exemples d'utilisation

Exemple 1.

1) Considérons $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$ sur $[0,1]$.

a) f_n est continue sur $[0,1]$; elle est donc intégrable sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue, et les deux intégrales, de Riemann et par rapport à λ coïncident. Comme de plus les fonctions f_n sont *positives*, on peut utiliser le Théorème de convergence monotone pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n=0}^\infty \left[\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right] = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^\infty x^{2n}(1-x)\right] dx.$$

Mais, pour $0 \leqslant x < 1$:

$$\sum_{n=0}^\infty x^{2n}(1-x) = \frac{1}{1-x^2}\,(1-x) = \frac{1}{1+x} = f(x);$$

comme, pour $x = 1$, on a $\sum_{n=0}^\infty f_n(1) = 0$, on a $\sum_{n=0}^\infty f_n(x) = \frac{1}{1+x}$ seulement pour $0 \leqslant x < 1$, mais pas pour $x = 1$; c'est néanmoins vrai pour *presque tout* $x \in [0,1]$. Donc :

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=0}^\infty x^{2n}(1-x)\right] dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2.$$

Remarque. On aurait, pour éviter d'avoir seulement une égalité *presque partout*, se placer sur $[0,1[$ au lieu de $[0,1]$; mais dans ce cas, on n'a plus un intervalle compact, et on est donc confronté à des intégrales de Riemann généralisées, au lieu de vraies intégrales de Riemann.

b) D'autre part, comme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx &= \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1})\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2},\end{aligned}$$

on a :

$$\sum_{n=0}^\infty \left[\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right] = \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right] = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\cdot$$

c) On obtient donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2}\,.$$

2) Posons maintenant :

$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{2n}(1-x)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Notons que les termes dans la somme ne sont *plus positifs* ; on ne peut donc plus raisonner comme ci-dessus. Néanmoins, on a :

$$|s_N(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}(1-x) = f(x).$$

Comme $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour $0 \leqslant x < 1$, donc pour λ-presque tout $x \in [0,1]$, f est, comme la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, λ-intégrable sur $[0,1]$; on peut donc appliquer le *Théorème de convergence dominée*, et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx\right] &= \lim_{N\to\infty} \int_0^1 s_N(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(\lim_{N\to\infty} s_N(x)\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}(1-x)\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,(1-x)\,dx \\
&= \Big[\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Mais :

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\,;$$

on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

3) En combinant 1) et 2), on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\,,$$

soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}}.$$

Exemple 2. Pour $0 < \theta < 2\pi$, considérons :

$$f_\theta(x) = \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x}, \quad x \in [0,1].$$

1) f_θ étant continue sur $[0,1]$, ses parties réelle et imaginaire le sont aussi ; elles sont donc λ-intégrables sur $[0,1]$, et donc f_θ aussi. De plus les intégrales par rapport à λ sont égales aux intégrales de Riemann ; On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left[\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x}\, dx\right] &= \int_0^1 \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x}\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\right]_0^1 = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| \cdot
\end{aligned}$$

2) Posons :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\theta} x^k.$$

Pour $x \in [0,1]$, on a, puisque $e^{i\theta} \neq 1$:

$$S_n(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+2)\theta} x^{n+1}}{1 - e^{i\theta} x};$$

donc, pour $0 \leqslant x < 1$:

$$S_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x}\cdot$$

Il n'y a pas convergence pour $x = 1$; il y a en tout cas convergence presque partout sur $[0,1]$.

Comme, d'autre part :

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\theta} x|} = G(x),$$

et que la fonction G, étant continue sur $[0,1]$, y est λ-intégrable, on peut appliquer le *Théorème de convergence dominée* :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1 e^{i(k+1)\theta} x^k\, dx\right] = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x}\, dx.$$

Comme, pour tout $k \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{i(k+1)\theta} x^k \, dx = \frac{\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}}{k+1} \, ,$$

on obtient, en prenant les parties réelles :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|} \cdot$$

Exemple 3. On veut calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x} \, dx$, pour $\alpha > 1$.

La borne supérieure de l'intégrale dépend de n ; si l'on veut pouvoir appliquer un théorème de convergence, il faut donc prendre un intervalle contenant tous les intervalles $[0, n]$, $n \geqslant 1$. On se place donc sur $S = [0, +\infty[$, que l'on munit de la mesure de Lebesgue.

On pose, pour $x \geqslant 0$:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x),$$

c'est-à-dire que $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. La fonction f_n est continue par morceaux.

On sait que :

$$0 \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x \qquad \text{et que} \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x \, ;$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \mathrm{e}^{-(\alpha-1)x} \\[2ex] 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-(\alpha-1)x} = g(x) \end{array} \right. \quad , \qquad \forall x \geqslant 0.$$

L'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha-1)x} \, dx$ étant *absolument convergente* (par exemple parce que : $\int_0^X \mathrm{e}^{-(\alpha-1)x} \, dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-X}}{\alpha-1} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}$, et que la fonction est positive), la fonction g est λ-intégrable sur $[0, +\infty[$, et l'on peut utiliser le *Théorème de convergence dominée* :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x} \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \, d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)x} \, dx = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \end{aligned}$$

4 Intégrales dépendant d'un paramètre

4.1 Position du problème

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. On considère une famille $(f_x)_{x \in X}$ de fonctions $f_x \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ m-intégrables. On pose :

$$F(x) = \int_S f_x(t)\, dm(t).$$

Cela définit une fonction $F \colon X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on cherche à obtenir des propriétés pour F à partir de celles des f_x.

C'est une façon importante de construire de nouvelles fonctions.

Notons qu'il est préférable de voir la famille de fonctions $(f_x)_{x \in X}$ comme une fonction de deux variables $f \colon (t,x) \in S \times X \mapsto f(t,x) = f_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour mémoire, on remarquera que, dans les énoncés qui suivent, on demande que certaines conditions soient vérifiées partout, et que d'autres le soient seulement presque partout ; il ne faut y voir trop de complication, et se perdre entre les deux : il faut juste se rappeler que l'*on peut autoriser qu'une condition ne soit vérifiée que presque partout quand cette condition est relative à l'espace sur lequel on intègre*. Un peu de réflexion permet de s'y retrouver.

4.2 Continuité

Théorème 4.1 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré, et soit (X, d) un espace* **métrique**.

Soit $f \colon S \times X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

(a) pour presque tout $t \in S$, l'application :

$$x \in X \longmapsto f(t,x) \quad \textit{est } \textbf{continue} \,;$$

(b) pour tout $x \in X$, l'application :

$$f_x \colon t \in S \longmapsto f(t,x) = f_x(t) \quad \textit{est mesurable}\,;$$

(c) on a la **condition de domination** *: il existe une fonction $g \colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$* **$m$-intégrable** positive *telle que :*

$$\boxed{(\forall x \in X) \qquad |f(t,x)| \leqslant g(t) \quad \textit{pour } m\textit{-presque tout } t \in S}\,.$$

Alors $F(x) = \displaystyle\int_S f(t,x)\, dm(t)$ existe pour tout $x \in X$, et l'application $F \colon X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ainsi définie est **continue** *sur X.*

Comme cas particulier, on retrouve le cas connu où $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue sur le pavé $[a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ (il suffit de prendre pour g la fonction constante égale à $\|f\|_\infty = \sup_{t,x} |f(t,x)|$).

Preuve. D'abord, $F(x)$ existe grâce aux conditions (b) et (c).

Pour montrer la continuité, on montre que, en chaque $x \in X$, F est continue en x ; mais, X étant un espace *métrique*, il suffit de montrer que pour toute **suite** $(x_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers x, on a $F(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$. Pour une telle suite, posons :

$$h_n(t) = f(t, x_n) \qquad \text{et} \qquad h(t)f(t,x).$$

Les fonctions h_n et $h\colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont mesurables, par (a), et :

$$|h_n| \leqslant g \quad m\text{-presque partout}, \quad \forall n \geqslant 1,$$

par la condition (c). De plus, la condition (a) entraîne :

$$h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h \qquad m\text{-presque partout}.$$

On peut donc appliquer le *Théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_S h_n(t)\,dm(t) = \int_S h(t)\,dm(t) = F(x),$$

ce qui est le résultat cherché. □

Exemple. Posons :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt.$$

Ici, l'espace mesuré sera $S =]0,+\infty[$, avec la mesure de Lebesgue, et l'espace métrique est $X = [0,+\infty[$.

Posons :

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\cdot$$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue sur $X = [0,+\infty[$, et pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue, donc mesurable, sur $S =]0,+\infty[$. De plus, on a :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = g(t), \qquad \forall t > 0, \forall x \geqslant 0.$$

La fonction g est λ-intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est continue (donc mesurable et localement Riemann-intégrable) et car l'intégrale de Riemann généralisée de g est *absolument convergente* :

- au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge ;

- au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \sim \dfrac{1}{t^{3/2}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge.

Il en résulte que les f_x sont aussi λ-intégrables, et que leur inégrale par rapport à λ est égale à leur intégrale de Riemann gńéralisée $F(x)$. Nous sommes dans les condition du Théorème de continuité, et on peut dire que F est continue sur $[0, +\infty[$.

4.3 Limites

De la même façon, on démontre :

Théorème 4.2 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et $I = [a, b[$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert en b. Soit $f\colon S \times I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction telle que :*

(a) pour presque tout $t \in S$, $\lim_{x\to b} f(t, x) = l(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ existe ;

(b) pour tout $x \in I$, l'application $f_x\colon t \in S \longmapsto f(t, x)$ est mesurable ;

(c) on a la **condition de domination** *: il existe une fonction $g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$* **$m$-intégrable** positive *telle que :*

$$(\forall x \in I) \ : \qquad |f(t, x)| \leqslant g(t) \quad \text{pour } m\text{-presque tout } t \in S.$$

Alors, l'application $l\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est m-intégrable, et :

$$\boxed{\lim_{x\to b} \int_S f(t, x)\, dm(t) = \int_S l(t)\, dm(t)}\,.$$

Notons que l'on ne peut pas appliquer directement le Théorème de convergence dominée, car celui-ci n'est valable que pour des **suites** de fonctions. Ici la famille $(f_x)_{x\in I}$ n'est *pas dénombrable* ; néanmoins, comme dans la preuve du théorème sur la continuité, on se ramène à des *suites* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I telles que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, et donc à des *suites de fonctions* $h_n\colon t \in S \longmapsto h_n(t) = f(t, x_n)$. □

Exemple. Reprenons l'exemple précédent, avec $I = [0, +\infty[$.

on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)} = 0\,, \quad \forall t > 0.$$

Les conditions d'application du Théorème 4.2 ont déjà été vérifiées ci-dessus ; on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

4.4 Dérivabilité

Il faut faire attention que pour la dérivabilité, la condition de domination doit porter sur les dérivées.

Théorème 4.3 *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

Soit $f\colon S \times I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction telle que :

(a) pour presque tout $t \in S$, l'application $x \in I \longmapsto f(t,x)$ soit dérivable sur I, de dérivée $\partial_2 f(t,x)$;

(b) pour tout $x \in I$, l'application $f_x\colon t \in S \longmapsto f(t,x)$ est m-intégrable sur S ;

(c) on a la **condition de domination pour la dérivée** *: il existe une fonction $g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$* m**-intégrable** positive *telle que, pour m-presque tout $t \in S$:*

$$\boxed{\boxed{\big|\,\partial_2 f(t,x)\big| \leqslant g(t) \qquad \forall x \in I}}\,.$$

Alors, les fonctions $t \in S \longmapsto \partial_2 f(t,x)$ sont m-intégrables, et l'application $F\colon I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par :

$$F(x) = \int_S f(t,x)\,dm(t)$$

est dérivable sur I, et on a la formule de Leibniz *:*

$$\boxed{F'(x) = \int_S \partial_2 f(t,x)\,dm(t)}\,.$$

Remarquons que, dans la condition (b) on a demandé la m-intégrabilité, et pas seulement la mesurabilité, comme dans les théorèmes précédents ; dans ceux-ci, la m-intégrabilité découlait de la condition de domination, ce qui n'est pas le cas ici. De toute façon, dans la pratique, cette m-intégrabilité aura déjà, la plupart du temps, été montrée avant.

Notons ici un point délicat : dans la condition de domination (c) (et dans (a)), on a écrit qu'elle devait être vérifiée pour presque tout $t \in S$, mais, pour chacun de ces t, pour *tout* $x \in I$; explicitement, on demande : il existe une partie m-négligeable $N \subseteq S$ telle que $|\partial_2 f(t,x)| \leqslant g(t)$, pour tout $t \in S \setminus N$ et pour tout $x \in I$ (ce qui sous-entend que, pour tout $t \in S \setminus N$), l'application $x \in I \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I tout entier). Il est en effet essentiel que pour les $t \in S \setminus N$, l'inégalité soit vraie pour *tout* $x \in I$, car, comme on le verra dans la preuve, on va appliquer le Théorème des accroissements finis pour chacun de ces t. Dans les théorèmes sur la continuité et les limites, on avait demandé quelquechose de plus faible : pour tout $x \in X$, ou $x \in I$, il y a domination presque partout, ce qui s'écrit : il existe un ensemble m-négligeable $N_x \subseteq S$, pouvant donc dépendre de x, tel que $|f(t,x)| \leqslant g(t)$ pour tout $t \in S \setminus N_x$. Pour ces théorèmes, cela n'a pas d'importance, car, comme on se ramène à des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on travaille en fait avec des $t \in S \setminus N$, où $N = \bigcup_{n\geqslant 1} N_{x_n}$ est m-négligeable.

Il en résulte que le *Théorème fondamental du Calcul Intégral*, si important, n'est *pas* une conséquence du Théorème 4.3. En effet, si $U(x) = \int_a^x u(t)\,dt$, on doit écrire, pour avoir un intervalle d'intégration fixe : $U(x) = \int_a^b u(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)\,dt$. Mais la fonction $x \in [a,b] \mapsto u(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)$ est dérivable seulement sur $[a,b]\setminus\{t\}$ (et de dérivée nulle) ; son complémentaire $\{t\}$ est négligeable, mais il dépend de t ! D'ailleurs, si le Théorème 4.3 s'appliquait, on obtiendrait $U'(x) = 0$, ce qui est évidemment inepte !

Notons que le théorème reste vrai (voir la preuve) si I est semi-ouvert, avec dérivabilité à droite (resp. à droite) en a si a est l'extrémité gauche (resp. droite) de I.

En combinant ce théorème avec le Théorème de continuité, appliqué à $\partial_2 f$, on obtient :

Corollaire 4.4 *Si, dans les conditions du Théorème 4.3, on demande dans (a) que l'application $x \in I \longmapsto f(t,x)$ soit* continûment dérivable*, alors F est continûment dérivable sur I.*

Preuve du Théorème 4.3. Par hypothèse, il existe une partie m-négligeable $N \subseteq S$ telle, pour tout $t \in S \setminus N$), l'application $x \in I \mapsto f(t,x)$ soit dérivable sur I, et telle que $|\partial_2 f(t,x)| \leqslant g(t)$, pour tout $t \in S \setminus N$ et pour tout $x \in I$.

1) Soit $x \in I$, fixé, et soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de I, telle que $x_n \neq x$, $\forall n \geqslant 1$, et convergeant vers x. Comme, pour tout $t \in S \setminus N$:

$$\partial_2 f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(t,x_n) - f(t,x)}{x_n - x}\,,$$

la fonction, définie m-presque partout, et prolongée par 0 pour $t \in N$, $t \in S \mapsto \partial_2 f(t,x)$ est mesurable, comme limite d'une suite d'applications mesurables.

2) Soit $a \in I$ et $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subseteq I$.

Le **Théorème des accroissements finis** donne, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant r$, un nombre c_t entre a et x ($|a-c_t| < |a-x|$) tel que, pour $t \in S\setminus N$:

$$\left|\frac{f(t,x) - f(t,a)}{x-a}\right| = \big|\,\partial_2 f(t,c_t)\big| \leqslant g(t). \tag{4.1}$$

Le Théorème 4.2, appliqué aux intervalles $[a-r, a[$ et $]a, a+r]$, nous dit que l'application $t \mapsto \partial_2 f(t,a)$ est m-intégrable sur S, et que :

$$\frac{F(x) - F(a)}{x-a} = \int_S \frac{f(t,x) - f(t,a)}{x-a}\,dm(t) \xrightarrow[x\to a]{} \int_S \partial_2 f(t,a)\,dm(t),$$

c'est-à-dire que F est dérivable en a, et que :

$$F'(a) = \int_S \partial_2 f(t,a)\,dm(t),$$

comme annoncé. □

On notera dans cette preuve que, comme on n'a pas d'information sur c_t, on doit bien, pour pouvoir écrire la majoration dans (4.1), avoir la condition de domination, lorsque $t \in S \setminus N$, pour *tout* $x \in I$.

Exemple 1. Reprenons les exemples précédents, avec :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt,$$

avec :

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\,, \qquad t > 0, x \geqslant 0.$$

On a, pour tous $t > 0$ et $x \geqslant 0$:

$$\partial_2 f(t,x) = -\frac{-t\,\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)} = \frac{\sqrt{t}}{(1+t)}\,\mathrm{e}^{-tx}.$$

On n'a **pas** la condition de domination pour tout $x \geqslant 0$, ni même pour tout $x > 0$, car :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)}\, dt = +\infty,$$

mais on va montrer que, pour tout $\alpha > 0$, F est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$; de sorte que F sera dérivable sur $]0, +\infty[= \bigcup_{\alpha>0}]\alpha, +\infty[$.

Pour cela, fixons un nombre $\alpha > 0$, et appliquons le Théorème 4.3 sur l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$. Sur cet intervalle, on a :

$$\big|\,\partial_2 f(t,x)\big| \leqslant \frac{\sqrt{t}}{(1+t)}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = g(t),$$

et g est λ-intégrable sur $S =]0, +\infty[$ car son intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ converge absolument : g est positive et :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 g(t) = \lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = 0,$$

car $\alpha > 0$; donc $0 \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$ pour t assez grand (il est important d'avoir $\alpha > 0$, pour garder une exponentielle). Le Théorème 4.3 s'applique donc : F est continûment dérivable sur $]\alpha, +\infty[$, et :

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)}\,\mathrm{e}^{-tx}\, dt.$$

Remarque. On aurait pu raisonner de façon un tout petit peu différente, en montrant que, pour chaque $x_0 > 0$, F est dérivable en x_0, et pour cela, choisir un $\alpha > 0$ tel que $\alpha < x_0$ (par exemple $\alpha = x_0/2$), et montrer que F est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$, ce qui donne, en particulier, la dérivabilité de F en x_0.

Application. Calcul de $A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, du$.

Pour cela, remarquons que, pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
F'(x) - F(x) &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{\sqrt{t}}{(1+t)} - \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \right] \mathrm{e}^{-tx}\, dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\, dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) du, \\
&\qquad\qquad \text{en posant } u = \sqrt{tx}, \text{ d'où } du = \sqrt{x}\, \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\
&= -\frac{2A}{\sqrt{x}}\cdot
\end{aligned}$$

On a une *équation différentielle linéaire du* 1^{er} *ordre*, à coefficients constants, que l'on intègre par la *méthode de variation de la constante* : on cherche F de la forme $F(x) = k(x)\, \mathrm{e}^x$; cela donne :

$$\big(k'(x)\, \mathrm{e}^x + k(x)\, \mathrm{e}^x\big) - k(x)\, \mathrm{e}^x = -\frac{2A}{\sqrt{x}}\,,$$

soit :

$$k'(x) = -2A\, \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,, \quad \forall x > 0,$$

d'où :

$$k(x) = -2A \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + C\,, \quad \forall x \geqslant 0,$$

parce que k est, comme F, *continue sur* $[0, +\infty[$, et donc en 0. Donc :

$$F(x) = \left[-2A \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + C \right] \mathrm{e}^x, \quad \forall x \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Comme, par définition :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)} \overset{v=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\, dv}{1+v^2} = \big[2 \arctan v\big]_0^{+\infty} = \pi,$$

on obtient $C = \pi$.

D'autre part, on a vu que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; il résulte donc de (4.2) que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[-2A \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + \pi \right] = \lim_{x\to+\infty} F(x)\, \mathrm{e}^{-x} = 0. \tag{4.3}$$

Mais :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \overset{v=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\, (2dv) = 2A. \tag{4.4}$$

Il résulte de (4.3) et (4.4) que $4A^2 = \pi$, soit $A = \sqrt{t}/2$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{t}}{2}}.$$

Exemple 2. La fonction $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-t^2/2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

intervient de façon très importante en **Probabilités**, et s'appelle la **densité de Gauss**. D'après l'Exemple 1, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, d\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \overset{u=t/\sqrt{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, du = 1.$$

On définit sa **fonction caractéristique** par :

$$\boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{itx}\, dt}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Calculons-la.

Pour cela, posons, pour $t, x \in \mathbb{R}$:

$$f(t,x) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{itx}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque $|f(t,x)| = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, et que $\mathrm{e}^{-t^2/2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 1$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\big|\, \partial_2 f(t,x) \big| = \big|\, it\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{itx} \big| = |t|\, \mathrm{e}^{-t^2/2} = g(t).$$

La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ car son intégrale généralisée converge absolument : g est positive et $t^2 g(t) = |t|^3\, \mathrm{e}^{-t^2/2} \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g(t) \leqslant 1/t^2$ pour $|t|$ assez grand. Par conséquent, Φ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} it\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{itx}\, dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Intégrons par parties :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[i\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{itx} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i(ix)\ \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{itx}\, dt = -x\Phi(x).$$

En intégrant cette équation différentielle, on trouve :

$$\Phi(x) = \Phi(0)\, \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Comme :

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1,$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\Phi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}}.$$